

Integracija - 3 dodatne teoreme

December 19, 2019

Grinova teorema

(Veza između dvostrukog integrala po nekoj oblasti i krivolinijskog integrala po granici te oblasti)

Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ oblast ograničena deo-po-deo glatkom krivom C . Ako su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ neprekidne, zajedno sa svojim parcijalnim izvodima $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ na zatvorenoj oblasti D onda važi:

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

\oint_{C^+} znači da se integracija vrši u pozitivno orijentisanom smeru.

Stoksova formula

(Veza između krivolinijskog i površinskog integrala)

Neka je S ograničena, glatka, dvostrana površ sa deo-po-deo glatkom granicom C . Neka su $P, Q, R : S \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne i imaju neprekidne parcijalne izvode. Tada važi:

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_S \int \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Formula Gausa-Ostrogradskog

(Veza između površinskog integrala po granici (rubu) oblasti V (površ S) i trostrukog integrala po oblasti V)

Neka je $V \subset \mathbb{R}^3$ zatvorena oblast, ograničena deo-po-deo glatkim površima čija unija S (rub oblasti) je deo po deo glatka površ. Neka su $P, Q, R : V \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije sa neprekidnim parcijalnim izvodima. Tada važi:

$$\int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \int_V \int \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$